UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR

DEPARTAMENTO DE FÍSICA

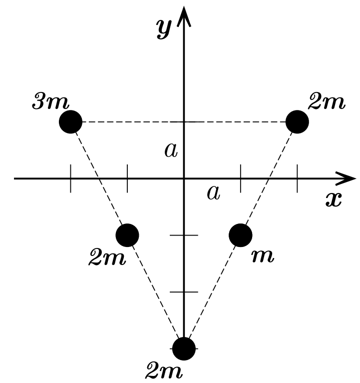
FS1112 • 1^{er} Parcial (**100/3**)

Martes, 29 de Julio de 2014

Nombre ______________________________ Carnet ________________

Las siguientes **tres** *preguntas se refieren al sistema representado en la figura:*

Un sistema consta de cinco partículas, de masas $\{2m, 3m, 2m, 2m, m\}$ $(\circlearrowleft)$ respectivamente, localizadas en las posiciones que se indican en la figura. La unidad de longitud para ambos ejes es $a = 1\,cm$.



1. $\boxed{5\,pts.}$ El centro de masas $\overrightarrow{\boldsymbol{R}}_{CM}$ del sistema está localizado en la posición:

( ) $\overrightarrow{\boldsymbol{R}}_{CM} = +0.4\,a\,\widehat{\boldsymbol{x}} + 0.3\,a\,\widehat{\boldsymbol{y}}$ (★) $\overrightarrow{\boldsymbol{R}}_{CM} = -0.3\,a\,\widehat{\boldsymbol{x}} - 0.4\,a\,\widehat{\boldsymbol{y}}$

( ) $\overrightarrow{\boldsymbol{R}}_{CM} = -0.3\,a\,\widehat{\boldsymbol{x}} + 0.4\,a\,\widehat{\boldsymbol{y}}$ ( ) $\overrightarrow{\boldsymbol{R}}_{CM} = +0.3\,a\,\widehat{\boldsymbol{x}} - 0.4\,a\,\widehat{\boldsymbol{y}}$

( ) $\overrightarrow{\boldsymbol{R}}_{CM} = -0.4\,a\,\widehat{\boldsymbol{x}} + 0.3\,a\,\widehat{\boldsymbol{y}}$

2. [5 *pts.*] El momento de inercia del sistema, respecto al eje $\boldsymbol{z}$, es:

( ) $I_0^z = 12\,m\,a^2$ (★) $I_0^z = 49\,m\,a^2$ ( ) $I_0^z = 18\,m\,a^2$

( ) $I_0^z = 31\,m\,a^2$ ( ) $I_0^z = 26\,m\,a^2$

3. [5 *pts.*] El momento de inercia del sistema, respecto al eje $\boldsymbol{z}'$ paralelo a $\boldsymbol{z}$, que pasa por el centro de masas es:

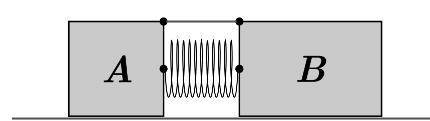
( ) $I_{CM}^z = 18\,m\,a^2$ ( ) $I_{CM}^z = 49\,m\,a^2$ ( ) $I_{CM}^z = 31\,m\,a^2$

(★) $I_{CM}^z = 46.5\,m\,a^2$ ( ) $I_{CM}^z = 51.5\,m\,a^2$

Las siguientes **dos** *preguntas se refieren al sistema representado en las figuras:*

Dos bloques, de masas respectivas $m_A = M$ y $m_B = 3M$, descansan sobre una superficie horizontal sin fricción. Un resorte sin masa está comprimido entre los bloques, los cuales permanecen atados en reposo por una cuerda delgada. Se rompe la cuerda, y el bloque B sale disparado con velocidad $v_B = v_0$.

4. [5 *pts.*] La velocidad relativa del bloque A respecto al bloque B será:

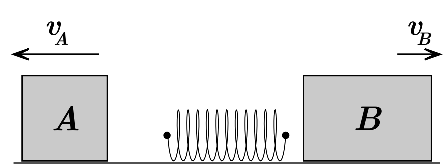


( ) $v_{AB} = -v_0$ ( ) $v_{AB} = -3\,v_0$

(★) $v_{AB} = -4\,v_0$ ( ) $v_{AB} = -0.75\,v_0$

( ) $v_{AB} = -1.33\,v_0$

5. [5 *pts.*] La energía potencial almacenada en el resorte comprimido era:



( ) $U = Mv_0^2/2$ ( ) $U = 2Mv_0^2$

( ) $U = 4Mv_0^2$ (★) $U = 6Mv_0^2$

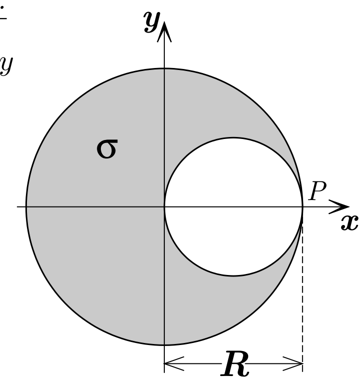
( ) $U = Mv_0^2/4$

6. [5 *pts.*] Una pareja de patinadores sobre hielo, uno de masa $M_H = 80\,[Kg]$ y otra de masa $M_F = 50\,[Kg]$, tiran cada uno de un extremo de una cuerda tensa, de longitud $D = 20\,[m]$. Los patines deslizan sin fricción sobre el hielo. Cuando el tipo se haya acercado una distancia $d_H = 5\,[m]$, la tipa se habrá acercado una distancia:

( ) $d_F = 5\,[m]$ ( ) $d_F = 2.5\,[m]$ (★) $d_F = 8\,[m]$

( ) $d_F = 10\,[m]$ ( ) $d_F = 4\,[m]$

Las siguientes **cuatro** *preguntas se refieren al sistema representado en la figura:*



Un disco de radio R tiene densidad uniforme $\boldsymbol{\sigma}$ y está localizado en el plano x–y con su centro en el origen de coordenadas. El disco tiene un hueco circular, de radio $R/2$ y centro en $(R/2)\,\hat{\boldsymbol{x}}$, como se muestra en la figura.

7. [5 *pts.*] La masa total del sistema es la siguiente:

( ) $M = \frac{1}{2}\pi\,\sigma\,R^2$ ( ) $M = \frac{1}{4}\pi\,\sigma\,R^2$ ( ) $M = \pi\,\sigma\,R^2$

(★) $M = \frac{3}{4}\pi\,\sigma\,R^2$ ( ) $M = \frac{5}{4}\pi\,\sigma\,R^2$

8. [5 *pts.*] El momento de inercia del sistema, respecto al eje perpendicular al plano del disco, que pasa por el punto P de la figura, es el siguiente:

( ) $I_P = \frac{15}{32}\,\pi\,\sigma\,R^4$ ( ) $I_P = \frac{15}{32}\,\pi\,\sigma\,R^2$ ( ) $I_P = \frac{45}{32}\,\pi\,\sigma\,R^2$

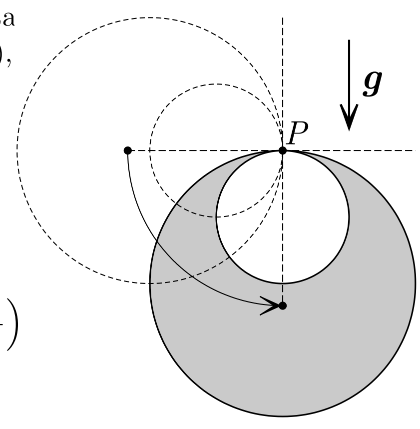
(★) $I_P = \frac{45}{32}\,\pi\,\sigma\,R^4$ ( ) $I_P = \frac{45}{64}\,\pi\,\sigma\,R^4$

9. [5 *pts.*] La distancia D_{CM} que separa al centro de masas del punto P de la figura es la siguiente:

( ) $D_{CM} = \frac{5}{4}\,R$ ( ) $D_{CM} = \frac{3}{2}\,R$ ( ) R

(★) $D_{CM} = \frac{7}{6}\,R$ ( ) $D_{CM} = \frac{4}{5}\,R$

Suponga que el disco cuelga del extremo más delgado (punto P), y se suelta desde el reposo en la posición que se muestra en la figura (figura punteada), siendo la aceleración de gravedad $\vec{\boldsymbol{g}} = -g\,\hat{\boldsymbol{y}}$.



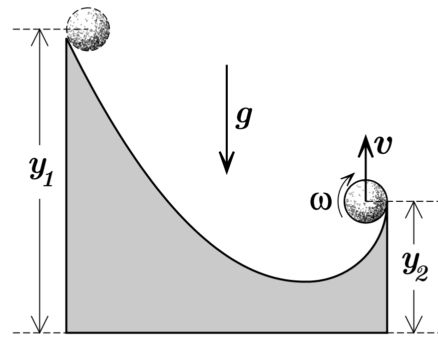
10. [5 *pts.*] La velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ del disco, al llegar su centro de masas al punto más bajo, está dada por la relación:

( ) $\omega^2 = 2\left(\frac{g}{R}\right)$ (★) $\omega^2 = \frac{56}{45}\left(\frac{g}{R}\right)$ ( ) $\omega^2 = \left(\frac{g}{R}\right)$

( ) $\omega^2 = \frac{56}{15}\left(\frac{g}{R}\right)$ ( ) $\omega^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{g}{R}\right)$

Las siguientes **tres** *preguntas se refieren al sistema representado en la figura:*

Una bola de masa M y radio R (momento de inercia $I_{CM} = 2MR^2/5$) se suelta en reposo desde lo alto de una rampa a $y_1 = 8\,[m]$. La bola rueda sin deslizar a lo largo de la cuesta, y sale disparada verticalmente por el extremo inferior, cuya altura es $y_2 = 1\,[m]$. Los valores respectivos de la masa y el radio son $M = 1\,[Kg]$ y $R = 20\,[cm]$.



11. [5 *pts.*] El momento de inercia de la bola, respecto al punto de contacto con la superficie es el siguiente:

( ) $I_P = \frac{2}{5} MR^2$ (★) $I_P = \frac{7}{5} MR^2$

( ) $I_P = \frac{3}{5} MR^2$ ( ) $I_P = \frac{6}{5} MR^2$ ( ) $I_P = \frac{8}{5} MR^2$

12. [5 *pts.*] La velocidad angular de la bola cuando llega al extremo inferior es, aproximadamente:

(★) $\omega = 50\,[s^{-1}]$ ( ) $\omega = 94\,[s^{-1}]$

( ) $\omega = 54\,[s^{-1}]$ ( ) $\omega = 42\,[s^{-1}]$ ( ) $\omega = 38\,[s^{-1}]$

13. [5 *pts.*] La bola sale disparada por el extremo inferior con velocidad $v = \omega R$. Al llegar al punto más alto de la trayectoria, la bola:

( ) Tiene velocidad cero y energía cinética cero

( ) Comienza a caer y a girar en sentido contrario al que giraba mientras subía

(★) Tiene la misma velocidad angular ω que cuando salió disparada

( ) Deja de girar, porque toda la energía cinética se convierte en energía potencial

( ) Gira con mayor velocidad angular, porque la energía cinética traslacional se convierte en rotacional

---

14. [5 *pts.*] Un cilindro macizo con densidad uniforme, rueda sin deslizar a lo largo de una superficie horizontal. El cociente entre la energía cinética de traslación K_T y la energía cinética de rotación K_R es el siguiente:

( ) $K_T/K_R = 0.5$ (★) $K_T/K_R = 2$ ( ) $K_T/K_R = 1.5$ ( ) $K_T/K_R = 1$

( ) Hay que conocer las dimensiones y la masa del cilindro para poder calcular tal cociente

15. [5 *pts.*] Un sistema consta de dos partículas de masas $\boldsymbol{m_1}$ y $\boldsymbol{m_2}$, respectivamente. Se miden los momenta, lineal y angular, para cada partícula respecto al centro de masas, y se observa que:

(★) Los momenta lineales tienen igual magnitud, pero los momenta angulares no

( ) Los momenta angulares tienen igual magnitud, pero los momenta lineales no

( ) Los momenta lineales tienen igual magnitud y los momenta angulares también

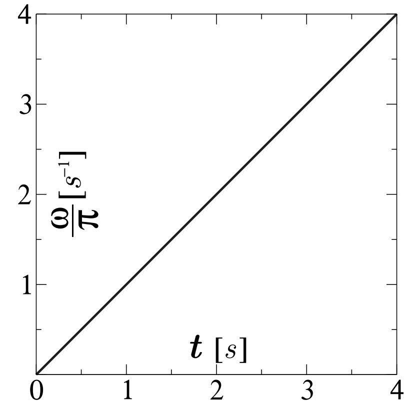
( ) Los momenta lineales tienen distinta magnitud y los momenta angulares también

( ) No se puede afirmar nada sin conocer las posiciones y velocidades respecto al centro de masas

Las siguientes **tres** *preguntas se refieren al sistema representado en la figura:*

Un disco de radio $R = 1\,[m]$ comienza a girar desde el reposo, aumentando su velocidad angular a ritmo constante (ver el gráfico), alcanzando el valor $\omega_0 = 4\pi\,[s^{-1}]$ en el instante $t = 4\,[s]$. Una mancha sobre el borde del disco se encuentra inicialmente en la posición $\vec{\boldsymbol{r}} = R\,\widehat{\boldsymbol{x}}$.

16. [5 *pts.*] En el instante $t = 3\,[s]$, la aceleración angular α, la velocidad angular ω y la posición angular ϕ son, respectivamente:



( ) $\alpha = 4\pi\,[s^{-2}]$ • $\omega = 12\pi\,[s^{-1}]$ • $\phi = 18\pi$

( ) $\alpha = \pi\,[s^{-2}]$ • $\omega = 3\pi\,[s^{-1}]$ • $\phi = 9\pi$

( ) $\alpha = 2\pi\,[s^{-2}]$ • $\omega = 6\pi\,[s^{-1}]$ • $\phi = 9\pi$

(★) $\alpha = \pi\,[s^{-2}]$ • $\omega = 3\pi\,[s^{-1}]$ • $\phi = \dfrac{9\pi}{2}$

( ) $\alpha = \dfrac{\pi}{2}\,[s^{-2}]$ • $\omega = \dfrac{3\pi}{2}\,[s^{-1}]$ • $\phi = \dfrac{9\pi}{2}$

17. [5 *pts.*] En el instante $t = 3\,[s]$, la posición $\vec{\boldsymbol{r}}$ y la velocidad $\vec{\boldsymbol{v}}$ de la mancha son, respectivamente:

( ) $\vec{\boldsymbol{r}} = +\widehat{\boldsymbol{y}}\,[m]$ • $\vec{\boldsymbol{v}} = +3\pi\,\widehat{\boldsymbol{x}}\,[m/s]$ ( ) $\vec{\boldsymbol{r}} = -\widehat{\boldsymbol{x}}\,[m]$ • $\vec{\boldsymbol{v}} = -3\pi\,\widehat{\boldsymbol{y}}\,[m/s]$

( ) $\vec{\boldsymbol{r}} = -\widehat{\boldsymbol{y}}\,[m]$ • $\vec{\boldsymbol{v}} = +3\pi\,\widehat{\boldsymbol{x}}\,[m/s]$ (★) $\vec{\boldsymbol{r}} = +\widehat{\boldsymbol{y}}\,[m]$ • $\vec{\boldsymbol{v}} = -3\pi\,\widehat{\boldsymbol{x}}\,[m/s]$

( ) $\vec{\boldsymbol{r}} = +\widehat{\boldsymbol{x}}\,[m]$ • $\vec{\boldsymbol{v}} = +3\pi\,\widehat{\boldsymbol{y}}\,[m/s]$

18. $\boxed{5\,pts.}$ En el instante $t = 3\,[s]$, la aceleración $\vec{\boldsymbol{a}}$ de la mancha es la siguiente:

( ) $\vec{\boldsymbol{a}} = -\pi\,\widehat{\boldsymbol{x}} + 9\pi^2\,\widehat{\boldsymbol{y}} \quad [m/s^2]$ ( ) $\vec{\boldsymbol{a}} = -\pi\,\widehat{\boldsymbol{x}} + 16\pi^2\,\widehat{\boldsymbol{y}} \quad [m/s^2]$

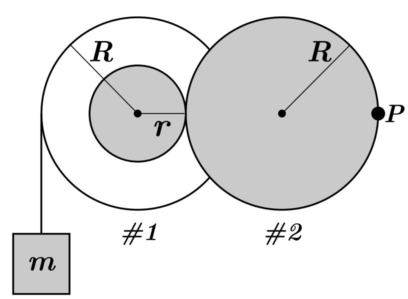
( ) $\vec{\boldsymbol{a}} = -\pi\,\widehat{\boldsymbol{x}} - 16\pi^2\,\widehat{\boldsymbol{y}} \quad [m/s^2]$ (★) $\vec{\boldsymbol{a}} = -\pi\,\widehat{\boldsymbol{x}} - 9\pi^2\,\widehat{\boldsymbol{y}} \quad [m/s^2]$

( ) $\vec{\boldsymbol{a}} = -9\pi^2\,\widehat{\boldsymbol{x}} - \pi\,\widehat{\boldsymbol{y}} \quad [m/s^2]$

Las siguientes **dos** *preguntas se refieren al sistema representado en la figura:*

Dos piezas de micro–engranaje, ambas de radio $\boldsymbol{R}$, están acopladas entre sí por un piñón central de radio $\boldsymbol{r}$. De la pieza #**1** se desenrrolla una cuerda de cuyo extremo cuelga un bloque de masa $\boldsymbol{m}$, que cae verticalmente con velocidad $\boldsymbol{v}$ y aceleración $\boldsymbol{a}$.

19. [5 *pts.*] La magnitud de la aceleración angular de la pieza #**2** es:



( ) $\alpha_2 = a/R$ ( ) $\alpha_2 = aR/r^2$

(★) $\alpha_2 = ar/R^2$ ( ) $\alpha_2 = a/r$

( ) No se puede calcular sin conocer el valor de la masa $\boldsymbol{m}$

20. [5 *pts.*] La componente radial de la aceleración del punto P sobre el borde de la pieza #**2** tiene magnitud:

( ) $a_{2r} = v^2/r$ (★) $a_{2r} = (rv)^2/R^3$ ( ) $a_{2r} = v^2/R$

( ) $a_{2r} = (Rv)^2/r^3$ ( ) $a_{2r} = a$

RESPUESTAS DETALLADAS:

1–3 : La masa total del sistema es $\boldsymbol{M = 10\,m}$, los productos de las posiciones por las masas, y de las masas por las distancias cuadradas al eje $\boldsymbol{z}$, están dados en la siguiente tabla:

m_i	$2m$		$3m$		$2m$		$2m$		m		
$\vec{\boldsymbol{r}}_i$	$(2a,a)$		$(-2a,a)$		$(-a,-a)$		$(0,-3a)$		$(a,-a)$		
$\sum_i m_i\vec{\boldsymbol{r}}_i/(m\,a)$	$(4,2)$	$+$	$(-6,3)$	$+$	$(-2,-2)$	$+$	$(0,-9)$	$+$	$(1,-1)$	$=$	$(-3,-4)$
$\sum_i m_i\left(x_i^2+y_i^2\right)/(m\,a^2)$	10	$+$	15	$+$	4	$+$	18	$+$	2	$=$	49

Luego:

1. $10\,m\times\overrightarrow{\boldsymbol{R}}_{CM} = m\,a\times(-3\,\widehat{\boldsymbol{x}} - 4\,\widehat{\boldsymbol{y}})$ $\Longrightarrow$ $\boxed{\overrightarrow{\boldsymbol{R}}_{CM} = -0.3\,a\,\widehat{\boldsymbol{x}} - 0.4\,a\,\widehat{\boldsymbol{y}} \quad \bigstar}$

2. $I^z_{0} = \left(m\,a^2\right)\times 49$ $\Longrightarrow$ $\boxed{I^z_{0} = 49\,m\,a^2 \quad \bigstar}$

3. La distancia del eje $\boldsymbol{z}$ al centro de masas es $D = 0.5\,a$. De acuerdo al teorema de ejes paralelos,
   $I^z_{0} = I^z_{CM} + MD^2$. Siendo $MD^2 = 10\,m\times 0.25\,a^2 = 2.5\,m\,a^2$, se tiene $\boxed{I^z_{CM} = 46.5\,m\,a^2 \quad \bigstar}$

4–5 : Al estar en reposo los bloques, $4MV_{CM} = Mv_A + 3Mv_B = 0 \implies v_A = -3v_B$. Siendo nula la velocidad del centro de masas, la energía mecánica del sistema es sólo potencial (U) al inicio y sólo cinética $\left(K = \mu v_{AB}^2/2 = U\right)$ al final, donde $\mu = 3M/4$ es la masa reducida y $v_{AB} = v_A - v_B$ es la velocidad relativa.

4. $\Longrightarrow$ $\boxed{v_{AB} = -4\,v_0 \quad \bigstar}$

5. $\Longrightarrow$ $\boxed{U = 6\,Mv_0^2 \quad \bigstar}$

---

6. De nuevo, se tiene un sistema de dos partículas en el que el centro de masas no se mueve, y por lo tanto
   $M_H\Delta x_H = -M_F\Delta x_F$, es decir $\Delta x_F = -M_H\Delta x_H/M_F$ $\Longrightarrow$ $\boxed{d_F = 8\,[m] \quad \bigstar}$

7–10 : Al tener el hueco la mitad del radio que el disco, su área y por lo tanto su masa, serán 1/4 de las del disco completo, pero negativas. Así, la masa total del sistema es $M = 3M_{disco}/4$. También, al calcular para el hueco tanto el momento de inercia respecto a su centro de masas, como la corrección de ejes paralelos, se obtendrá un factor 1/16 negativo respecto a las cantidades correspondientes para el disco.

7. $M_{disco} = \sigma\pi R^2$ $\Longrightarrow$ $\boxed{M = 3(\sigma\,\pi\,R^2)/4 \quad \bigstar}$

8. $I_P = \left(M_{disco}R^2/2 + M_{disco}R^2\right) - \left(M_{disco}R^2/2 + M_{disco}R^2\right)/16 = (3/2)(15/16)M_{disco}R^2$
   $\Longrightarrow$ $\boxed{I_P = (45/32)(\sigma\,\pi\,R^4) \quad \bigstar}$

9. $MD_{CM} = (3/4)M_{disco}D_{CM} = M_{disco}R - M_{disco}R/8 = (7/8)M_{disco}R$ $\Longrightarrow$ $\boxed{D_{CM} = (7/6)\,R \quad \bigstar}$

10. Toda la energía potencial inicial, $U = MgD_{CM}$, se habrá de convertir en la energía cinética, $K = I_P\omega^2/2$, del punto más bajo. Resolviendo para ω^2, se tiene

$$\omega^2 = 2MgD_{CM}/I_P = (3/2)(7/6)(\cancel{M_{disco}}\,g\,R)/(45/32)(\cancel{M_{disco}}R^2) \quad\Longrightarrow\quad \boxed{\omega^2 = (56/45)(g/R) \quad \bigstar}$$

11–13 : Al estar rodando sin deslizar, la energía mecánica de la bola se conserva. Si elegimos el cero de energía potencial en el extremo más bajo de la rampa, la energía cinética de la bola en el extremo más bajo, $K = I_P\omega^2/2$, será igual a la energía potencial en el más alto, $U = Mg(y_1 - y_2)$.

11. $I_P = I_{CM} + MR^2$ $\Longrightarrow$ $\boxed{I_P = (7/5)MR^2 \quad \bigstar}$

12. Debido a que la energía mecánica se conserva, $K = (7/10)MR^2\omega^2 = Mg(7\,[m]) = U$. Cancelando la masa a cada lado y haciendo $g \approx 10\,[m/s^2]$, se tiene $\omega^2 = 100/R^2\,[m^2/s^2]$, donde $R = 0.2\,[m]$, de manera que

$$\boxed{\omega = 10/0.2\;[s^{-1}] = 50\,[s^{-1}] \quad \bigstar}$$

13. Debido a la gravedad, que actúa en el centro de masas, la bola que sube se detiene intercambiando energía cinética <u>traslacional</u> por energía potencial. El estado de rotación del sistema, $\boxed{\omega \text{ no cambia, } \bigstar}$ porque no hay fuerzas laterales que produzcan aceleración angular

---

14. Siendo que el momento de inercia principal del cilindro $I_{CM} = MR^2/2$, y que la condición de rodadura establece que $R\omega = v$, el cociente queda $K_T/K_R = (Mv^2/2)/(MR^2\omega^2/4)$ $\Longrightarrow$ $\boxed{K_T/K_R = 2 \quad \bigstar}$

15. Un sistema de dos partículas se caracteriza porque la suma de momenta lineales da cero en el sistema de referencia del centro de masas. Luego, $\vec{\boldsymbol{p}}_2 = -\vec{\boldsymbol{p}}_1 = \vec{\boldsymbol{p}}$ y $m_2\vec{\boldsymbol{r}}_2 + m_1\vec{\boldsymbol{p}}_1 = 0$, dando como resultado

$$\boxed{p_1 = p_2 \quad \bigstar} \text{ y } \boxed{L_1 = (m_2/m_1)L_2 \neq L_2 \quad \bigstar}$$

16–18 : El gráfico corresponde a un movimiento circular uniformemente acelerado, de manera que la velocidad angular es $\omega = \alpha t$ y el desplazamiento angular desde $\phi = 0$ es $\phi = \alpha t^2/2$. De la gráfica, se deduce que $\alpha = \pi\,[s^{-2}]$.

16. En el instante $t = 3\,[s]$, se tiene que $\boxed{\alpha = \pi\,[s^{-2}] \;\Rightarrow\; \omega = 3\pi\,[s^{-1}] \;\Rightarrow\; \phi = \frac{9\pi}{2} \quad \bigstar}$

17. En el instante $t = 3\,[s]$, la mancha está en $\phi = 9\pi/2 \to \pi/2$, donde los versores polares quedan $\widehat{\boldsymbol{r}} = \widehat{\boldsymbol{y}}$ y $\widehat{\boldsymbol{\phi}} = -\widehat{\boldsymbol{x}}$. Usando las expresiones para la velocidad, $\vec{\boldsymbol{v}} = \omega R\,\widehat{\boldsymbol{\phi}}$, y la posición, $\vec{\boldsymbol{r}} = R\,\widehat{\boldsymbol{r}}$, se tiene que

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{r}} = +\widehat{\boldsymbol{y}}\,[m] \quad \bigstar} \text{ y } \boxed{\vec{\boldsymbol{v}} = -3\pi\,\widehat{\boldsymbol{x}}\,[m/s] \quad \bigstar}$$

18. Dado que $a_\phi = R\alpha = \pi\,[m/s^2]$ y $a_r = -R\omega^2 = 9\pi^2\,[m/s^2]$, $\boxed{\vec{\boldsymbol{a}} = -\pi\,\widehat{\boldsymbol{x}} - 9\pi^2\,\widehat{\boldsymbol{y}} \quad [m/s^2] \quad \bigstar}$

---

19 –20 : La rotación del disco #2 está acoplada a la del piñón mediante la condición $r\alpha_1 = R\alpha_2$. La del disco #2, y por lo tanto la del piñón, con el desplazamiento vertical del bloque según $v = \omega_1 R$ y $a = \alpha_1 R$. Luego:

19. $\boxed{\alpha_2 = (a\,r)/R^2 \quad \bigstar}$

20. $\boxed{a_{2r} = \omega_2^2 R = (rv)^2/R^3 \quad \bigstar}$